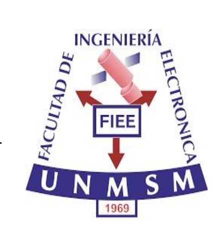


UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA Y ELÉCTRICA
Álgebra y Geometría Analítica
Semestre: 2024-I



Tema: Inducción matemática, sumatoria, número combinatorio y binomio de Newton.

GUÍA DE PRÁCTICA Nº 2

1. Usando el principio de inducción matemática, probar cada una de las siguientes fórmulas.

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$

b) $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n.(3n-1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

c) $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ... + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$

d) $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + ... + n \times (n+1) \times (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$

e) $\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{2\times 4} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{1\times 3} + ... + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

f) $1 + 1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)!\ , \quad n \geq 1$

g) $\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2 + (n-1)2^{n+1}$

h) $\sum_{j=1}^{n} 3^j = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

2. Demostrar por inducción matemática

a) $2n \leq n^2 + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{N},$

c) $3^n \geq 1 + 2n, \ \forall n \geq 1$

d) $2^n \geq n^2, \ \forall n \geq 5$

e) $5^n \geq 1 + 4n, \ \forall n \geq 1$

f) $n! > n^2, \ \forall n \geq 4$

3. Probar que

a) $4^n - 1$ es divisible por 3, $\forall\ n \geq 1$

b) $x^{2n} - 1$, es divisible por x + 1, $\forall n \in \mathbb{N}$

c) $3^{2n} + 7$ es divisible por 8, $\forall\ n \geq 1$

d) $n^3 + 2n$, es divisible por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$

e) $10^n - 1$, es divisible por 9, $\forall n \in \mathbb{N}$

f) $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13, $\forall n \geq 1$

g) $10^n + 3(4^{n+2}) + 5$, es divisible por 9, $\forall n \in \mathbb{N}$

h) $3^{2n+3} + 2^{n+3}$, tiene como factor al 7, $\forall n \in \mathbb{N}$

i) $3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{3n+1}$ es un múltiplo de 17, $\forall n \in \mathbb{N}$

j) $2^{2n-1} \cdot 3^{n+2} + 1$ es divisible por 11, $\forall n \in \mathbb{N}$

4. Determine las siguientes sumas

$a)\ \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$

$b)\ \sum_{i=1}^{10} (i-1)(i+1)$

$c)\ \sum_{k=5}^{12} (k+1)(2k-3)$

$d)\ \sum_{k=7}^{10} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k+3}(k-j+1)^2$

5. Escribir en forma de sumatoria.

a) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots$

b) $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \ldots$

c) $2 + \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \frac{8}{7} + \frac{10}{9} \ldots$

6. De los datos $\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 160,\ \sum_{i=1}^{8} x_i = 120,\ x_9 = 6,\ x_{10} = 8.$ Determine las siguientes sumas

a) $\sum_{i=1}^{10} x_i^2$ b) $\sum_{i=1}^{9} x_i(x_i - 2)$ c) $\sum_{i=1}^{10}(x_i - 1)^2 - \sum_{i=1}^{8}(x_i - 1)^2$

7. De los datos $\sum_{i=1}^{6}(a_i - 3)^2 = \sum_{i=1}^{6}(a_i + 2)^2$ y $\sum_{i=1}^{6} a_i^2 = 10\sum_{i=1}^{6} a_i$. Calcule $\sum_{i=1}^{6} a_i(a_i - 3)$

8. De los datos $\sum_{i=1}^{5}(3x_i - 2y_i)^2 = 101$, $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 13$ y $\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 2$. Calcule $\sum_{i=1}^{5} y_i^2$

9. Si $\sum_{k=1}^{10}(rk + s) = 70$, $\sum_{k=3}^{10}(rk - s) = 136$. Hallar $5r + 2s$.

10. Sea $f(x) = x^2 - 4x + 4, x \in \mathbb{R}$. Hallar el valor de $A = 2n^2 + n$, para $n \in \mathbb{Z}^+$, si

$$\sum_{k=0}^{n}[f(k+1) - f(k)] = 117$$

11. Demuestre

a) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1}$ b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

12. Encontrar una fórmula en términos de n para la siguiente sumatoria.

$a)$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ $b)$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$

13. Determine los términos que se pide

a) $(x + \sqrt{2})^5$, hallar el término 2

b) Término medio de $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^6$

c) $\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b\right)^4$, hallar el término 1

d) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^7$, hallar el término 6

14. Encuentra una regla que generalice y que permita obtener el valor de $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$

15. Si $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n = 64^{n-5}$, hallar el valor de n.

16. Hallar el coeficiente de.

a) x^7 de $(1 - x^2 - x^3)^n$

b) x^{-2} de $x^2\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^{28}$

c) x^n de $(1 - x + x^2)(1 + x)^{2n+1}$

d) x^2 de $(x^2 + 2x + 2)^n$

e) El término independiente de $(3x^{65} + 2)\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{3n}$

f) El término independiente de $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{3n}$

17. En el desarrollo de $\left(\frac{x\sqrt[3]{x}}{6} + x^{-28/15}\right)^n$, la suma de los coeficientes binomiales de los últimos tres términos es igual a 79. Hallar el término independiente.

18. En el desarrollo de $\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{1}{3}}\right)^n$, la suma de todos los coeficientes binomiales es igual a 128. Hallar el término que contiene a a^5.